

令和9年度徳山工業高等専門学校編入学試験

受験番号

数学

総得点 ()

※の枠内には記入しないこと

1. 以下の問いに答えよ。

(1) 次の方程式を解け。(8点)

$$x^4 + 2x^3 - x^2 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 2x - 1) = 0$$

よって、 $x^2 = 0$ または $x^2 + 2x - 1 = 0$ である。

これらを解いて

$$x = 0 \text{ (2重解)}, \quad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

※ 1(1)

(2) 次の不等式を解け。必要であれば(1)の結果を用いて良い。(8点)

$$x^4 + 2x^3 - x^2 \geq 0$$

(1)より、与式の左辺を因数分解すれば

$$x^2(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}) \geq 0$$

$x \neq 0$ のとき、両辺を x^2 で割って

$$(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}) \geq 0$$

よって $x \geq -1 + \sqrt{2}$, $x \leq -1 - \sqrt{2}$

また、 $x = 0$ のとき、明らかに不等式を満たす。

以上より、不等式の解は

$$x = 0, \quad x \geq -1 + \sqrt{2}, \quad x \leq -1 - \sqrt{2}$$

※ 1(2)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

2. 1辺の長さが2の正方形OABCについて、対角線ACで折ってできる、下図のような三角錐を考える。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると、以下の問いに答えよ。

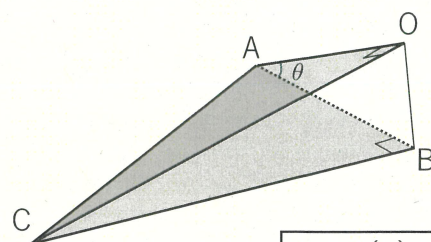
(1) 辺OBの長さを k , $\angle OAB$ のなす角度を θ とする。 k を用いて $\cos \theta$ の値を表せ。(6点)

余弦定理より

$$AO^2 + AB^2 - 2AO \cdot AB \cos \theta = OB^2$$

$$8 - 8 \cos \theta = k^2$$

$$\therefore \cos \theta = 1 - \frac{k^2}{8}$$



※ 2(1)

(2) $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$ が成り立つことを用いて、 $OB \perp AC$ であることを示せ。(8点)

題意より

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{b} - \vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\therefore \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

よって $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ であるから、 $OB \perp AC$ が示された。

※ 2(2)

(3) 辺ACの中点をMとする。 $\triangle OAB$ および $\triangle OBC$ がともに正三角形となるとき、 $OM \perp BM$ となることを示せ。(8点)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \vec{b} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM} = |\overrightarrow{OM}|^2 - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$$

$$\text{ここで } OM = \sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 2^2 \cos 60^\circ = 2 \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM} = 2 - \frac{1}{2}(2 + 2) = 0$$

よって $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ であるから、 $OM \perp BM$ が示された。

※ 2(3)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

3. 以下の問いに答えよ。

(1) θ が第2象限の角で $\tan \theta = -3$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。(8点)

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ より}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 10$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ より } \cos \theta < 0 \right)$$

$$\text{また、} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -3 \text{ より}$$

$$\sin \theta = -3 \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

※ 3(1)

(2) 不等式 $2 \sin 2x > 1$ を解け。ただし $0 \leq x < 2\pi$ とする。(8点)

$$2 \sin 2x > 1$$

$$\sin 2x > \frac{1}{2}$$

ここで $0 \leq x < 2\pi$ より、 $0 \leq 2x < 4\pi$ の範囲で不等式を解くと

$$\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi < 2x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi$$

となる。よって x が満たす範囲は

$$\frac{\pi}{12} < x < \frac{5}{12}\pi, \quad \frac{13}{12}\pi < x < \frac{17}{12}\pi$$

※ 3(2)

数学

※の枠内には記入しないこと

4. 以下の問いに答えよ。

(1) $\sqrt[5]{-4} \cdot (\sqrt[5]{2})^3 + 3\log_2 \sqrt{12} - \log_2 24\sqrt{3}$ を計算せよ。(8点)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= -\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{2^3} + \log_2 (\sqrt{12})^3 - \log_2 24\sqrt{3} \\ &= -\sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3} + \log_2 \left(\frac{12\sqrt{12}}{24\sqrt{3}} \right) \\ &= -\sqrt[5]{2^5} + \log_2 \frac{\sqrt{4}}{2} \\ &= -2 + \log_2 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

※ 4(1)

(2) $0 < A < B < 1$ に対して $\log_A B - \log_B A = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ とするとき、

$\log_A B + \log_B A$ の値を求めよ。(8点)

$$\log_B A = \frac{\log_A A}{\log_A B} = \frac{1}{\log_A B} \text{ より}$$

$$\left(\log_A B - \frac{1}{\log_A B} \right)^2 = \frac{2}{9} \iff (\log_A B)^2 + \left(\frac{1}{\log_A B} \right)^2 = \frac{2}{9} + 2$$

よって

$$\begin{aligned} (\log_A B + \log_B A)^2 &= \left(\log_A B + \frac{1}{\log_A B} \right)^2 \\ &= (\log_A B)^2 + \left(\frac{1}{\log_A B} \right)^2 + 2 \\ &= \frac{38}{9} \end{aligned}$$

ここで $0 < A < B < 1$ より、 $0 < \log_A B < 1$, $\log_B A > 1$ であるから

$$\log_A B + \log_B A > 0$$

故に

$$\log_A B + \log_B A = \frac{\sqrt{38}}{3}$$

※ 4(2)

数学

※の枠内には記入しないこと

5. 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = -2x^3 + 5$ の $x = a$ における微分係数を、定義にしたがって求めよ。

(8点)

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \{ -2(a+h)^3 + 5 \} - (-2a^3 + 5) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot [(a+h)^3 - a^3] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot [3a^2h + 3ah^2 + h^3] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-6a^2 - 6ah - 2h^2) = -6a^2
 \end{aligned}$$

※ 5(1)

(2) 関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 180x + 10$ に対して以下の問いに答えよ。(a) $f(x)$ を $\frac{f'(x)}{6}$ で割ったときの商と余りを求めよ。(5点)(b) (a)の結果を用いて、 $f(x)$ の極値をすべて求めよ。(7点)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f'(x) &= 6x^2 + 6x - 180 \\
 \frac{f'(x)}{6} &= x^2 + x - 30
 \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ を $\frac{f'(x)}{6}$ で割ったときの商は $2x + 1$ 、
余りは $-121x + 40$ となる。

(b) 極値を取る点を求めると、 $f'(x) = 0$ より

$$\begin{aligned}
 6(x^2 + x - 30) &= 0 \\
 (x + 6)(x - 5) &= 0 \\
 \therefore x &= -6, 5
 \end{aligned}$$

よって、 $x = -6$ で極大、 $x = 5$ で極小となる。

ここで、(a)で求めた商と余りを用いて

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2x + 1)(x^2 + x - 30) - 121x + 40 \\
 &= (2x + 1)(x + 6)(x - 5) - 121x + 40
 \end{aligned}$$

と表せるから

$$\begin{aligned}
 f(-6) &= -121 \cdot (-6) + 40 = 766, \\
 f(5) &= -121 \cdot 5 + 40 = -565
 \end{aligned}$$

と分かる。以上より、

$$\begin{aligned}
 x = -6 \text{ のとき極大値 } f(-6) &= 766, \\
 x = 5 \text{ のとき極小値 } f(5) &= -565
 \end{aligned}$$

※ 5(2)

数学

※の枠内には記入しないこと

6. 次の不等式を証明せよ。(10点)

$$\int_0^1 \frac{2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}}}{2 - x} dx > \frac{1}{2026} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{2025}}\right)$$

$$\frac{2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}}}{2 - x} = \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{2026}}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{k=1}^{2026} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}}}{2 - x} dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{2026} \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &> \sum_{k=1}^{2026} \frac{1}{2026} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2026} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2026}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2026} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{2025}}\right) \end{aligned}$$

別解) $0 \leq x \leq 1$ において、 $2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}} > 1$, $0 < 2 - x \leq 2$ より

$$\frac{2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}}}{2 - x} > \frac{1}{2 - x} \geq \frac{1}{2}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2 - \frac{x^{2026}}{2^{2025}}}{2 - x} dx &> \int_0^1 \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \\ &> \frac{1}{2026} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{2025}}\right) \end{aligned}$$

※ 6