

数学

受験番号

総得点 ()

※の枠内には記入しないこと

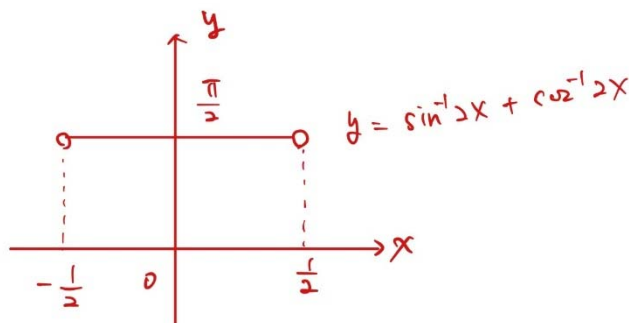
1. 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \sin^{-1} 2x + \cos^{-1} 2x$ $\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$ のグラフを書け。(12点)

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 0 \text{ より } y \text{ は定数関数である。}$$

$$\text{ここで } y|_{x=0} = \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

故にグラフは下記となる。



※ 1(1)

(2) 自然数 n に対して $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$ と定める。この時、和積の公式を用いることによ

って $I_n - I_{n-2} = \int_0^\pi \frac{\sin(nx) - \sin((n-2)x)}{\sin x} dx$ を計算せよ。またこれを用いて I_{2026} の値を求めよ。

(13点)

和積の公式より $\sin(nx) - \sin((n-2)x) = 2 \cos\{(n-1)x\} \cdot \sin x$ より $n \geq 3$ に対して

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-2} &= \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon'} \frac{2 \cos\{(n-1)x\} \cdot \sin x}{\sin x} dx = 2 \int_0^\pi \cos\{(n-1)x\} dx \\ &= \frac{2}{n-1} [\sin\{(n-1)x\}]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

故に

$$I_{2026} = I_{2024} = \cdots = I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{\sin x} dx = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon'} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin x} dx = 2 \int_0^\pi \cos x dx = 0$$

※ 1(2)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

2. 関数 $f(x, y) = -4y^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x} \cdot y + 3y - 2x + 1$ に関して以下の問いに答えよ。

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の $x = 2, y = 1$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ。

また、この接平面の法線ベクトルを1つ求めよ。(12点)

$$z_x = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{x}} - 2, \quad z_y = -8y + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 3 \quad \text{より } x = 2, y = 1 \text{ の時、}$$

$$z = -4 + 2\sqrt{2}\sqrt{2} + 3 - 4 + 1 = 0, \quad z_x = 1 - 2 = -1, \quad z_y = -8 + 4 + 3 = -1$$

故に求める接平面の方程式は

$$z - 0 = -1(x - 2) - 1(y - 1)$$

また、法線ベクトルは

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0$$

より $(1, 1, 1)$ が取れる。

※ 2(1)

(2) 関数 $z = f(x, y)$ の極値を全て求めよ。ただし $x > 0$ とする。(13点)

$$z_x = z_y = 0 \text{ とすると } \begin{cases} 2\sqrt{x} = \sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}\sqrt{x} - 8y = -3 \end{cases} \text{ より } 2y - 8y = -3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } x = \frac{1}{8}$$

また、 $z_{xx} = -\frac{\sqrt{2}y}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $z_{xy} = z_{yx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$, $z_{yy} = -8$ よりヘッセ行列式は

$$|H|_{\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}y}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} & -8 \end{vmatrix}_{\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)} = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 64 - 16 > 0$$

また、 $z_{xx}\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) = -8 < 0$ より

z は $(x, y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ において極大値 $z = -1 + \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ を持つ。

※ 2(2)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

3. 以下の問いに答えよ。

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ。(5点)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\tan x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\tan x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan x} \quad \text{を両辺 } x \text{ で積分して } \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\tan x}$$

故に $\log|y| = -\log|\sin x| + C$ (C は任意定数) より、

$$y = \frac{C'}{\sin x} \quad (C' = \pm e^C \text{とした})$$

※3(1)

(2) (1)の結果と定数変化法を用いて、次の微分方程式の一般解を求めよ。(7点)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\tan x} = \sin^2 x$$

 x の関数 $u(x)$ を用いて $y = \frac{u(x)}{\sin x}$ と仮定し、与式に代入すると

$$\frac{du}{dx} \frac{1}{\sin x} - \frac{u \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{u}{\sin x \tan x} = \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = \sin^3 x$$

故に両辺を x で積分して

$$u = \int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \quad (C \text{は任意定数})$$

よって、与式の一般解は

$$y = \frac{C}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{3 \tan x} - \frac{1}{\tan x}$$

※3(2)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ。(5点)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

特性方程式を解いて

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$$

よって一般解は

$$y = e^x(A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) \quad (A, B \text{は任意定数})$$

※3(3)

(4) (3)の結果を利用して、次の微分方程式の一般解を求めよ。(8点)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 3 \cos 2x$$

与式の解の1つを $y_s = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ と予想する。ただし C_1, C_2 は任意定数である。この時、 $y_s'' = -4y_s$ より与式に代入すると $-2y_s' - y_s = 3 \cos 2x$ となる。故に $y_s' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$ より

$$4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x - C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x = 3 \cos 2x$$

$$(-C_1 - 4C_2) \cos 2x + (4C_1 - C_2) \sin 2x = 3 \cos 2x$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} -C_1 - 4C_2 = 3 \\ 4C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

が成り立てば良い。これを解いて $C_1 = -\frac{3}{17}$, $C_2 = -\frac{12}{17}$

よって与式の解の1つは

$$y_s = -\frac{3}{17} \cos 2x - \frac{12}{17} \sin 2x$$

故に、与式の一般解は

$$y = e^x(A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x) - \frac{3}{17} \cos 2x - \frac{12}{17} \sin 2x$$

(A, Bは任意定数)

※3(4)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

4. 2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値を全て求めよ。(5点) A の固有値を λ とおくと、固有値方程式より

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 3 \\ -1 & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \left(\lambda - \frac{5}{2} \right) + 3 = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

故に、 $\lambda = \frac{1}{2}, 1$

※4(1)

(2) (1)で求めた A の固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。(8点)固有値 $\frac{1}{2}, 1$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とする。 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば固有方程式より

$$\left(A - \frac{1}{2}E \right) \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成り立つ。これより、 $x = 2y$ を得る。よって

$$\boldsymbol{v}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } c_1 \neq 0)$$

同様に、 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば

$$(A - E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

より、 $2x = 3y$ を得る。よって

$$\boldsymbol{v}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } c_2 \neq 0)$$

※4(2)

受験番号

数学

※の枠内には記入しないこと

(3) n を自然数とすると、 A^n を求めよ。(7点) A の対角化行列を $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすると、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である。

よって

$$\begin{aligned}
 A^n &= PP^{-1}A^nPP^{-1} \\
 &= P(P^{-1}AP)^n P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{-n} & -3 \cdot 2^{-n} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^{-n} - 3 & -6 \cdot 2^{-n} + 6 \\ 2 \cdot 2^{-n} - 2 & -3 \cdot 2^{-n} + 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

※4(3)

(4) 自然数 n に対して A^n で表される線形変換によって、直線 $y = x$ はどのような図形に移されるか。(5点)直線 $y = x$ 上の任意の点 $P(x, x)$ をとる。題意の線形変換による P の像を $P'(x', y')$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^{-n} - 3 & -6 \cdot 2^{-n} + 6 \\ 2 \cdot 2^{-n} - 2 & -3 \cdot 2^{-n} + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x' = (-2 \cdot 2^{-n} + 3)x \\ y' = (-2^{-n} + 2)x \end{cases}$$

を得る。よって2式から x を消去すれば、

$$y' = \frac{-2^{-n} + 2}{-2 \cdot 2^{-n} + 3} x'$$

故に直線 $y = x$ は以下の直線に移される。

$$y = \frac{-2^{-n} + 2}{-2 \cdot 2^{-n} + 3} x$$

※4(4)