数学

受験番号	

総得点（　　　　　　　　　　）

※の枠内には記入しないこと

1．関数 $y = x(\log x)^3$ の増減と凹凸を調べ、グラフの概形を描け。また、極値をもつ場合にはその値と、対応する x の値を求めよ。（15点）

定義域は$x > 0$であり、$y' = (\log x)^3 + x \cdot 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} = (\log x)^2 \cdot (3 + \log x)$

よって、$y' = 0$ の解は $x = 1, e^{-3}$

また、$y'' = \{6\log x + 3(\log x)^2\} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}\log x \cdot (2 + \log x)$ より

$y'' = 0$ の解は $x = 1, e^{-2}$

故に増減表は以下の通りとなる。

x	0	$\cdots$	e^{-3}	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
y		↘	$-27e^{-3}$	↗	$-8e^{-2}$	↗	0	↗

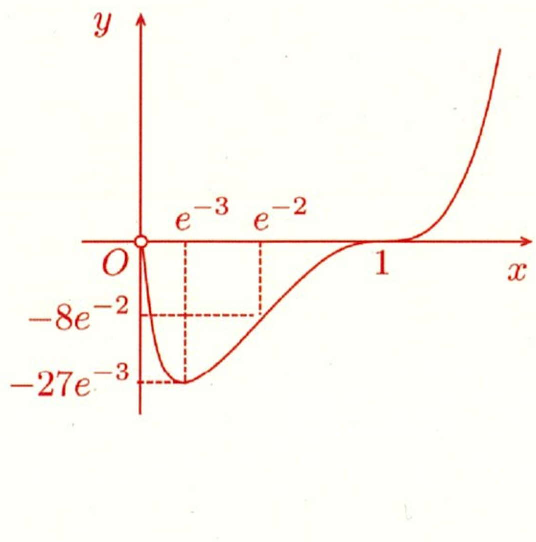
また、$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$ である。一方で、ロピタルの定理から

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)^3}{x^{-1}} = \lim_{x \to +0} \frac{3(\log x)^2}{-x^{-1}} = \lim_{x \to +0} \frac{6\log x}{x^{-1}} = \lim_{x \to +0} \frac{6}{-x^{-1}} = \lim_{x \to +0}(-6x) = 0$$

となるから、与式のグラフは以下のようになる。

よって図より、$x = e^{-3}$ において

極小値 $y = -27e^{-3}$ をとる。



※ 1

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

2．以下の問いに答えよ。

(1) 以下の級数が収束するような x の範囲と、そのときの和を求めよ。(8点)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(4-3x)^{n-1}$$

与式は初項 x，公比 $4-3x$ の等比級数であるから、級数が収束する条件は $|4-3x|<1$

これを解いて $1<x<\frac{5}{3}$

このときの和は

$$(\text{与式}) = \frac{x}{1-(4-3x)} = \frac{x}{3x-3} = \frac{x}{3(x-1)}$$

※ 2(1)

(2) 次の２重積分を広義積分の定義に従って計算せよ。

$$\iint_D \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

ただし、D は不等式 $x \leq 0,\ \ x^{\ 2}+y^2 \leq 1$ で表されるxy平面上の領域である。(10点)

1に比べ十分小さい $\epsilon>0$ を用いて、$D_\epsilon = \{(x,y)|x\leq 0,\ \epsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$とすると

$$(\text{与式}) = \lim_{\epsilon\to+0} \iint_{D_\epsilon} \frac{x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

となる。ここで $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$とすれば、$D'_\epsilon = \{(r,\theta)|\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}\ ,\ \epsilon\leq r\leq 1\}$となり

$$(\text{与式}) = \lim_{\epsilon\to+0} \iint_{D'_\epsilon} \frac{r^5\cdot\cos^4\theta}{r} drd\theta$$

よって

$$(\text{与式}) = \lim_{\epsilon\to+0} \int_\epsilon^1 r^4\ \mathrm{d}r \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \frac{1}{5}[r^5]_\epsilon^1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{40}$$

※ 2(2)

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

3．以下の問いに答えよ。ただし、y', y''は x に関する y の1次導関数と2次導関数を表す。

(1) 1階微分方程式 $y' - 2y = 0$ の一般解を求めよ。(8点)

与式を変形して

$$y' = 2y$$

$$\frac{1}{y}y' = 2$$

両辺をxで積分して

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\log|y| = 2x + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

$$y = C'e^{2x} \qquad (C' = \pm e^{C})$$

※ 3(1)

(2) (1)の結果と定数変化法を用いて、次の1階微分方程式の一般解を求めよ。(8点)

$$y' - 2y = \frac{e^{2x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

(1)より、xの関数$u(x)$を用いて$y = u(x)e^{2x}$として

与式に代入すると

$$u'e^{2x} + 2ue^{2x} - 2ue^{2x} = \frac{e^{2x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$u' = \frac{1}{e^{x} + e^{-x}}$$

両辺をxで積分して

$$\int du = \int \frac{dx}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\int du = \int \frac{e^{x}}{e^{2x} + 1}dx$$

$e^{x} = t$ とすれば

$$\int du = \int \frac{1}{t^2 + 1}dt$$

$$u = \tan^{-1} t + C \qquad (C\text{は任意定数})$$

$$= \tan^{-1} e^{x} + C$$

よって、与式の一般解は

$$y = e^{2x}(\tan^{-1} e^{x} + C) \qquad (C\text{は任意定数})$$

※ 3(2)

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

(3) 2階微分方程式 $y'' = -4y$ の一般解を求めよ。(8点)

$$\left(\text{与式}\right) \iff y'' + 4y = 0$$

よって、特性方程式

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

を解いて

$$\lambda = \pm 2i$$

したがって、一般解は

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad \left(A, B\text{は任意定数}\right)$$

※ 3(3)

(4) (3)の結果を用いて、次の2階微分方程式の一般解を求めよ。(10点)

$$y'' = -4y + 2xe^x$$

解の形を $y = (Cx + D)e^x$ と予想して

与式に代入すると

$$(Cx+D)''e^x + 2(Cx+D)'(e^x)' + (Cx+D)(e^x)'' = -4(Cx+D)e^x + 2xe^x$$

$$2Ce^x + (Cx+D)e^x + 4(Cx+D)e^x = 2xe^x$$

$$(2C+5D)e^x + 5Cxe^x = 2xe^x$$

係数を比較すれば、C, Dは連立方程式

$$\begin{cases} 2C + 5D = 0 \\ 5C = 2 \end{cases}$$

を満たす。これを解いて $C = \frac{2}{5}, D = -\frac{2}{5}C$

故に、与式の一般解は

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{2}{5}\left(x - \frac{2}{5}\right)e^x \qquad \left(A, B\text{は任意定数}\right)$$

※ 3(4)

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

4.　2次式 $Q = 5x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 2\sqrt{3}zx$ について、次の問いに答えよ。

(1) 3次正方行列 A および3次元行ベクトル ${}^T\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ を用いて

$$Q = {}^T\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と表すとき、A を求めよ。ただし、${}^T\boldsymbol{x}$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表す。(5点)

$A = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix}$ とすると

$${}^T\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2axy + 2byz + 2czx$$

より、係数を比較して

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

※ 4(1)

(2) (1) で求めた行列 A の固有値 λ を求めよ。(8点)

特性方程式 $|A - \lambda E| = 0$ を解く。

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

より、特性方程式は

$$(4-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 3(4-\lambda) = 0$$

$$(4-\lambda)\{(5-\lambda)(7-\lambda) - 3\} = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 32) = 0$$

$$(4-\lambda)^2(\lambda - 8) = 0$$

よって固有値は $\lambda = 4, 8$

※ 4(2)

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

(3) (2)で求めたAの固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。(10点)

(2)で求めた固有値 4, 8 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とする。

固有値 4 の固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として

$$(A-4E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

より $x = \sqrt{3}z$ を得る。
よって $y = c_1, z = c_2$ とすれば、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(c_1 \neq 0 \text{ または } c_2 \neq 0\right)$$

また、固有値 8 の固有ベクトルを求めると

$$(A-8E)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -4 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

より

$$\begin{cases} z = -\sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}$$

を得る。よって $x = c_3$ とすれば、固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ -\sqrt{3}c_3 \end{pmatrix} = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{ただし} c_3 \neq 0)$$

※ 4(3)

受験番号	

数学

※の枠内には記入しないこと

(4) ある直交行列 M を選んで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

とすると、2次式 Q は x', y', z' を用いて

$$Q = \alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 \quad (\text{ただし } \alpha \leq \beta \leq \gamma)$$

と表せる。このような M を1つ求めよ。(10点)

固有値 4 に対して、直交する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ を選ぶ。

$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、$\boldsymbol{r}_1 \perp \boldsymbol{r}_2$, $|\boldsymbol{r}_2| = 1$ を満たすように c_1, c_2 を決めると

$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 0$ より $c_1 = 0$. よって $\boldsymbol{r}_2 = c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

また $|\boldsymbol{r}_2| = 1$ より $c_2 = \pm\frac{1}{2}$ であるから、$c_2 = \frac{1}{2}$ として

$$\boldsymbol{r}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

一方、固有値 8 に対する大きさ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{r}_3$ とすると

$c_3 = \pm\frac{1}{2}$ であるから、$c_3 = \frac{1}{2}$ として

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

以上より、求めるべき直交行列は

$$M = (\boldsymbol{r}_1\ \boldsymbol{r}_2\ \boldsymbol{r}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

このとき $M^T M = E$ より

$$\begin{aligned} Q &= ({}^T\boldsymbol{x}M)({}^TMAM)({}^TM\boldsymbol{x}) \\ &= (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 4x'^2 + 4y'^2 + 8z'^2 \end{aligned}$$

となり、上記のMは題意を満たす。

※ 4(4)